

## パルスNMRによる格子下流の速度プロファイルの変化の測定

明治鍼灸大学 生理学教室

福田 耕治

要旨: 臨界レイノルズ数( $R_c=2300$ )以下の円筒管流において格子によって流れを乱し、流れの乱れからの回復の様子をパルス法NMR (CPMG法) のスピネコー信号の解析から観測した。速度プロファイルは層流の助走流とよく近似できるものであった。すなわち、中心部に一定速度を持つコアとそれを取り巻く放物線状の速度分布を持つプロファイルである。測定は格子からの距離を変えて層流に回復する領域まで行われた。無次元化された格子からの距離  $l^*(l/\rho_0 R)$  とコア半径  $a(l^*)/\rho_0$  との関係を表す実験式  $a(l^*)/\rho_0=1-4.9\sqrt{l^*}$  を得た。無次元化された助走区間は0.042であった。

Measurement of Velocity Profile Variation behind  
a Grid by Means of a Pulsed NMR Method

FUKUDA Kohji

Department of Physiology, Meiji College of Oriental Medicine

Summary: Pulsed NMR experiments of the CPMG type were performed on water flowing through a circular pipe under conditions of a low Reynolds number ( $R$ ) below the critical value of 2300. The flow was disturbed by a grid which was inserted in the upper stream of a detector coil. The amplitude of the spin echo signal was detected as a function of the intensity of the magnetic field gradients. The velocity profile behind the grid was investigated under the assumption that it consisted of a constant velocity core bounded by a parabolic arc. This profile is similar to that of a laminar inlet flow.

The core radius diminishes as the distance between the grid,  $l$ , and the detector coil increases. An empirical relation between the nondimensional distance  $l^*(=l/\rho_0 R)$  between the grid and the detector coil and the nondimensional core radius  $a(l^*)/\rho_0$  equal to  $a(l^*)/\rho_0=1-4.9\sqrt{l^*}$  was found. The nondimensional inlet length obtained was 0.042.

Key Words: パルス法NMR Pulsed NMR, 円筒管流 Pipe Flow, 格子による乱れ Disturbance by a Grid, 速度プロファイル Velocity Profile, 助走区間 Inlet Length

## I はじめに

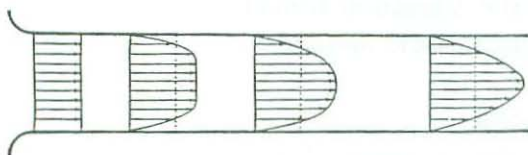
種々の流れの様子はパルス法NMRを用いて調べることができる。円筒管中の層流の流速や流速のプロファイルが多くの研究者<sup>1-11)</sup>によって調べられた。近年流れの可視化の研究にNMRイメージング<sup>8,11)</sup>を用いた方法が大きな寄与をしている。しかしパルスNMRの中で特に Carr-Purcell-Mei-

boom-Gill (CPMG) 法<sup>12)</sup>は種々の流れの観測において有用な手段であることが示されている<sup>5-7,9,10)</sup>。磁場勾配中に置かれた円筒管流に対してCPMG法を用いることによって、層流や乱流の平均速度だけでなく、速度プロファイルも観測できさらに乱流においては速度場の乱れや速度の時間相関をも観測されることが示されている<sup>9,10)</sup>。

多くの流れの形に対してCPMG法を適用できることを示すのは重要であると思われる。

ここでは、その一例として格子の下流の流れを取り上げる。長い円筒管中の水路に格子を設ける。臨界レイノルズ数以下の流れでは、格子の上流はハーゲン・ポワゼイユ流である。流れは格子によって乱されるが、格子から充分下流では再びハーゲン・ポワゼイユ流にもどる。この移行区間に興味を持ち、格子の下流での流れのプロファイルを実験法MNRを用いて観測することを試みた。

結果は格子直下の下流を除き、流れは層流における助走流<sup>13-17)</sup>のプロファイルに似た形をとって



円筒管内層流の助走流の速度分布

図1 円筒管内層流の助走流の概念図

一様流が円筒管に流入した後、入り口から流れがハーゲン・ポワゼイユ流になるまでの流れ、この領域を助走区間という。

いる。助走流とは図1のように一様流（一様な速度分布を持つ流れ）が円筒管に流入するとき、管の入り口から流れがハーゲン・ポワゼイユ流になるまでの流れを言う。またその流れの領域を助走区間という。助走流のプロファイルは中心部に一定速度を持つコアとそれを取り巻く放物線状の速度分布からなっている。

格子の下流の流れについて、そのプロファイルを実験法の場合に近似して、コアの半径の測定を格子からの距離を変えておこなった。

## II 実験方法と手順

実験方法と手順は参考文献<sup>5,7,10)</sup>と同様である。

図2に示すように円筒管を均一の静磁場ベクトル  $B_0(0, 0, B_{z0})$  と磁場勾配ベクトル  $G(=grad B_z)$  で作られる静磁場中に置く。核磁気共鳴に関

係する  $z$  方向の静磁場  $B_z$  は

$$B_z = B_{z0} + (G \cdot r) \quad (2.1)$$

で表せる。 $B_0$  は電磁石で作られその大きさは磁束密度で  $0.25T (=2500G)$  である。 $G$  は正しくはベクトルではなくテンソルであるが、その一部の成分のみが重要であるので、ベクトルとして取り扱っている。

共鳴周波数の rf パルス列 (時刻  $t=0$  に  $90^\circ$  rf パルス、時刻  $t=\tau$  と  $t=3\tau$  に  $90^\circ$  rf パルスと位相が  $\pi/2$  だけずれた  $180^\circ$  rf パルス) が送信コイルに加えられると時刻  $t=2\tau$  に第一の、 $t=4\tau$  に第二のスピンエコー信号が受信コイルを通じて観測される。

第一のスピンエコー信号からは速度の確率分布に関する情報が、第二の信号からはラグランジュ速度の時間相関または乱流拡散の大きさに関する情報が得られる<sup>5)</sup>。また速度プロファイル (速度の空間分布) は一定の仮定のもとで速度の確率分布から求めることが出来る。

測定は主として第一のスピンエコー信号に対して行う。従って速度プロファイルを対象とした。信号の検出において、位相敏感検波を用いるので、スピンエコー信号の同位相成分 ( $180^\circ$  rf パルスと同位相) と位相が  $\pi/2$  だけずれた直角成分を

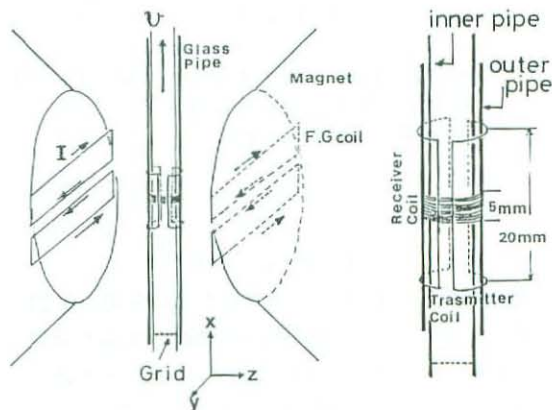


図2 アクリルガラス円筒管と電磁石、磁場勾配発生用コイルの配置

独立に観測できる。磁場勾配を流れの方向(図2の様にx軸方向)に取り、時刻  $t = 2\tau$  での同位相成分と直角成分のスピネコー信号強度を磁場勾配の大きさの関数として測定した。

流れを作るための駆動ポンプには誘導モーターを使用した。測定部での円筒管を図2に示した。2本の長い同心状の亚克力ガラスの円筒管で構成されている。内側の円筒管に格子として網目(#16)のシートが挿入され、その円筒管中が水が流れる。外側の円筒管には送信コイルと受信コイルが巻かれている。外側の円筒管は空間的に固定され、内側の円筒管は可動としているので、格子と送受信コイルの間の距離を変えることが出来る。内側の円筒管の内径は10mmである。

### III 解析法

時刻  $t = 2\tau$  のスピネコー信号強度はその時刻での試料中の全横核磁化に比例する。

$$M(2\tau) = M_0 \langle \exp i\phi_j(2\tau; \tau) \rangle_j \quad (3.1)$$

ここで  $M_0$  は90度 rf パルスを加える直前の核磁化、 $\phi_j(t; \tau)$  は試料中の  $j$  番目のスピンの時刻  $t$  での位相、 $\langle \rangle_j$  は受信コイル中の全スピンに対する集団平均である。磁化の減衰や回復に関する重要な物理量である緩和時間はCPMG法による流れ観測の場合無限大としてもよい。流れによる見かけ上の磁化の減衰の効果の方がはるかに大きいからである。さらに磁場勾配中の水の自己拡散による寄与も無視できる。

時刻  $2\tau$  での  $j$  番目のスピンの位相は次の式で与えられる<sup>7)</sup>。

$$\phi_j(2\tau; \tau) = -\gamma G \left[ \int_0^\tau \int_0^{t'} v_j(t') dt' dt - \int_0^\tau \int_0^\tau v_j(t') dt' dt \right] \quad (3.2)$$

$v_j(t)$  は  $j$  番目のスピンのラグランジュ速度で、その成分を含めて表すと  $v_j(u, v, w, t)$  であり、 $\gamma$  は陽子の磁気回転比である。

ここでスピンの速度とは、そのスピンを持つ陽子や水分子の速度の意味ではなく、その陽子で構

成される水分子を含む“流体粒子”の速度である<sup>18)</sup>。水分子自身の回転や並進運動は緩和時間に、また並進運動は自己拡散に寄与するが、流れを取り扱う場合無視できる。一般にラグランジュ速度が時間依存である時、式(3.2)の計算は大変難しい。しかし流れの中で全スピンの速度が時間に依存せず、流線が円筒管の軸に平行であると近似できる場合、式(3.2)は次式のように簡単になる。ただしベクトル  $G = (G_x, 0, 0)$  とする。

$$\phi_j(2\tau; \tau) = -\gamma G_x \tau^2 v_j \quad (3.3)$$

そこで式(3.1)は

$$M(2\tau) = M_0 \int P(u) \exp(i\gamma G_x \tau^2 u) du \quad (3.4)$$

と書ける。ここで円筒管中の速度の確率関数として  $P(u)$  を導入した。式(3.4)は  $t = 2\tau$  でのスピネコー信号強度が  $P(u)$  の  $\gamma G_x \tau^2$  に関するフーリエ変換であることを示している。従って  $G_x$  (または  $\tau$ ) の関数としての  $M(2\tau)$  の実験データが得られれば、それを数値的フーリエ逆変換をすることにより  $P(u)$  を求めることが出来る。また式(3.4)は複素フーリエ変換であり、 $M(2\tau)$  の実数部が信号強度の同位相成分に虚数部が直角成分に対応している。

速度プロファイルの関数はそれが軸対称で、動径座標に関して単調である場合には、関数  $P(u)$  から求めることが出来る。円筒管の半径を  $\rho_0$ 、動径座標を  $\rho$ 、格子からの受信コイルまでの距離を  $l$  とし、プロファイルを  $u(\rho, l)$  とする。  $P(u)$  と  $\rho$  の間に次の関係がある。

$$P(u) du = -\frac{2\rho}{\rho_0^2} d\rho \quad (3.5)$$

式(3.5)を境界条件  $\rho = \rho_0$  (管内壁) で  $u = 0$  のもとで積分をして  $u(\rho)$  に対して次式を得る。

$$\int P(u') du' = 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \quad (3.6)$$

速度の確率関数が測定データの逆フーリエ変換で

得られ、速度プロファイルも式(3.6)から求められることはすでに参考文献<sup>5,7)</sup>に紹介してある。

格子の下流の速度プロファイルとして層流の助走流の場合に対応して次の近似式を用いる。(図3)

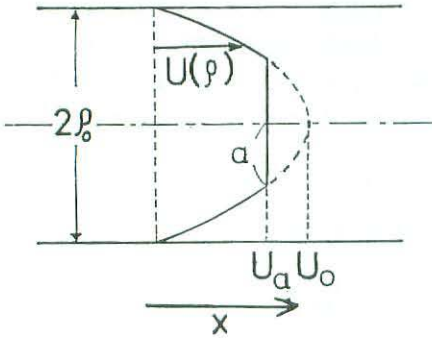


図3 モデルとして利用する速度プロファイル

$a(l) < \rho < \rho_0$  に対しては

$$u(\rho, l) = u_0(l) \left[ 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right], \quad (3.7a)$$

$0 < \rho < a(l)$  に対しては

$$u(\rho, l) = u_0(l) \left[ 1 - \frac{a(l)^2}{\rho_0^2} \right] \equiv u_a(l). \quad (3.7b)$$

ここで  $a(l)$  はコアの半径、 $u_a(l)$  はコアの速度、 $u_0(l)$  は  $\rho = a(l)$  で  $u(\rho, l)$  に連続性をもたせるための定数である。式(3.7)からスピネコー信号の強度を次のように計算出来る。まず、速度の確率関数  $P(u, l)$  は以下の式で与えられる。

$$P(u, l) = P_1(u, l) + P_2(u, l). \quad (3.8)$$

ここで、 $0 < u < u_a(l)$  に対しては

$$P_1(u, l) = \frac{1}{u_0(l)}, \quad (3.9)$$

$u = u_a(l)$  に対しては

$$P_2(u, l) = \frac{a^2(l)}{\rho_0^2} \delta\{u - u_a(l)\}. \quad (3.10)$$

である。 $\delta(x)$  はデルタ関数である。式(3.4)からスピネコー信号の強度として

$$M_R(2\tau) = M_0 \left[ (1 - \epsilon^2) \frac{\sin X}{X} - \epsilon^2 \cos X \right], \quad (3.11)$$

$$M_I(2\tau) = M_0 \left[ (1 - \epsilon^2) \frac{\cos X - 1}{X} + \epsilon^2 \sin X \right], \quad (3.12)$$

を得る。ここで  $X = \gamma G_x \tau^2 u_a(l)$  および  $\epsilon = a(l) / \rho_0$  である。図4に式(3.11)と(3.12)から期待されるスピネコー信号強度の磁場勾配依存性を示した。比較のために平均流速が等しいハーゲン・ポワゼユ流で期待されるスピネコー信号の強度を破線で示した。(3.11), (3.12)式で  $\epsilon = 0$  とした場合である。特徴的な差は明かである。ハーゲン・ポワゼユ流では  $M_I(2\tau)$  は正の値を取らない。また  $k$  を正の整数として  $X = 2\pi k$  で  $M_R(2\tau)$  と  $M_I(2\tau)$  は恒等的に0である。

次に流れを特徴づける重要な二つの量コアの速度とコアの半径がデータから数値逆フーリエ変換をせずに従って速度プロファイルの詳細を求めることなく得られることを示す。

ハーゲン・ポワゼユ流ではない場合でも式(3.12)から、 $X = 2k\pi$  で  $M_I(2\tau) \equiv 0$  である  $k = 1$  の時、磁場勾配の値、 $G_n$  で上式が満たされる(図4)。コアの速度  $u_a(l)$  として次式を得る。

$$u_a(l) = \frac{2\pi}{\gamma G_n \tau^2}. \quad (3.13)$$

図4中で磁場勾配の値  $G_\lambda$  では  $M_R(2\tau) = M_I(2\tau)$  であるので、次の関係式を得る。

$$\frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{\cos X_\lambda + \sin X_\lambda - 1}{X_\lambda (\sin X_\lambda - \cos X_\lambda)}, \quad (3.14)$$

ここで  $X_\lambda = \gamma G_\lambda \tau^2 u_a(l)$  である。式(3.13), (3.14)からコア半径  $a(l)$  が得られる。

#### IV 結果と検討

ここで図5に磁場勾配の関数として得た信号強度の同相成分、 $M_R$ 、と直角成分、 $M_I$  のデータ

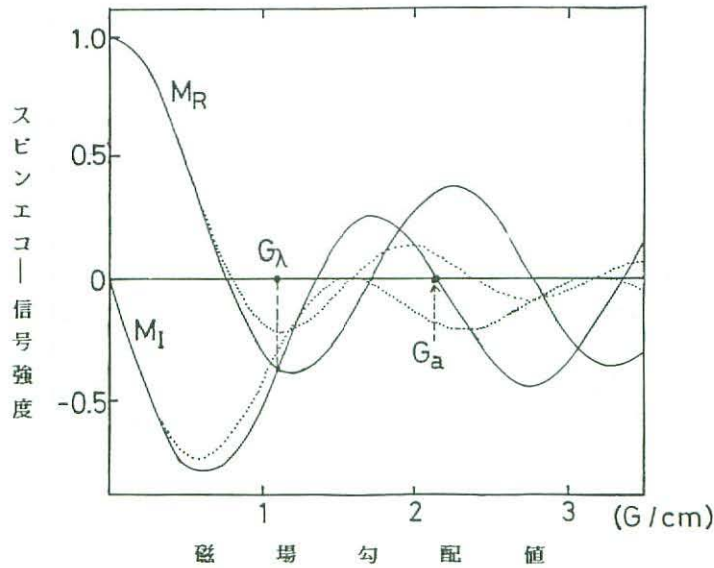


図4 期待されるスピンエコー信号の磁場勾配依存。

式 (3.11) と (3.12) から得られるスピンエコー信号強度の磁場勾配依存を実線で示した。それと平均流速が等しいハーゲン・ポワゼユ流で期待されるスピンエコー信号の強度を破線で示した。  $M_R$  は同相成分を  $M_I$  は直角成分を表す。

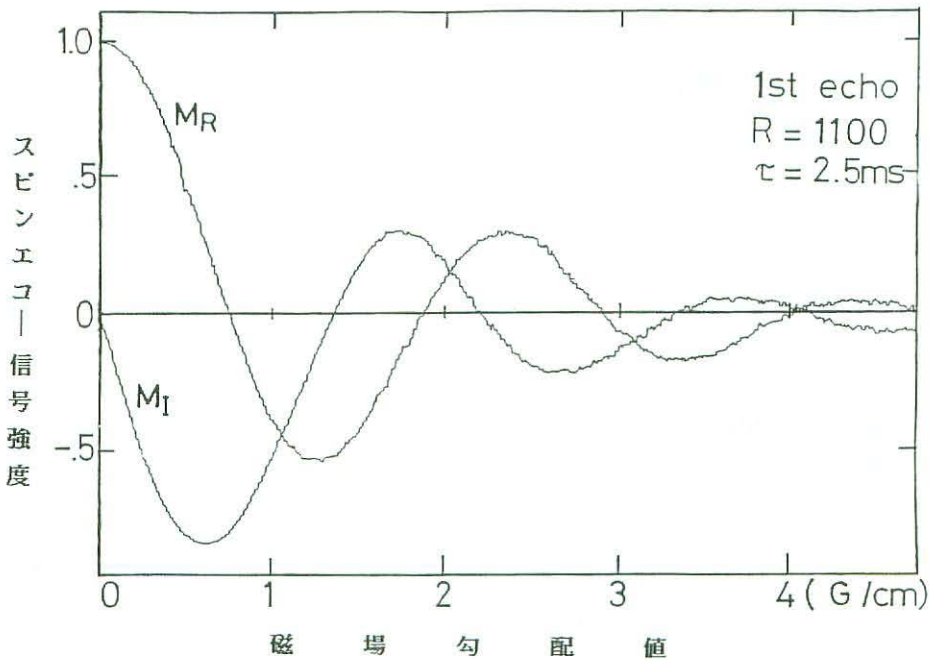


図5 格子の下流 ( $l = 6.8\text{cm}$ ) の流れて得られたスピンエコー信号強度の磁場勾配依存  $M_R$  は同位相成分を  $M_I$  は直角成分を示す。図4の理論曲線 (実線) と比較されるものである。

の例を示す。実験条件は次の通りである。平均流速を11.0cm/s, レイノルズ数を1100, 格子-受信コイル間の距離を6.8cm,  $\tau=2.5$ msである。比較として図6に格子から十分下流でのハーゲン・ポワゼユ流に回復している流れでの結果を示す。図5, 6は図4の理論曲線と比較されるものである。

図5と図6から得られた速度プロファイルを図7に示した。図中で黒丸は格子の下流の流れ(図5から)から得られたプロファイルであり, 中心部に一定速度を持つコアとそれを取り巻く放物線状の速度分布を持っているのが明瞭に分かる。一方白丸は同じ平均流速のハーゲン・ポワゼユ流(図6から)によるものでコアは消失しハーゲン・ポワゼユ流に回復していることが分かる。図中で円筒管の軸にあたる付近のずれは, それぞれ図5, 6で有限の磁場勾配値でのスピンエコー信号

強度のみから得られた数値逆フーリエ変換の打ち切り効果に起因する。

レイノルズ数570, 750と1160の流れについて格子からの距離を変えて測定したデータについて式(3.13)と(3.14)に従い, 解析した。

コア半径について総ての結果を図8に示した。ここでは横軸には無次元化した距離,  $l^* = l / \rho_0 R$ を, 縦軸には同じく無次元化したコア半径,  $a(l^*) / \rho_0$ を用いた。総てのデータは異なったレイノルズ数であるにもかかわらず一本の曲線に乗っている。図8の実線は無次元の量  $l^*$  とコアの半径  $a(l^*)$  の実験式

$$a(l^*) = 1 - K\sqrt{l^*} \quad (4.1)$$

を仮定し, 最小自乗法から求めたものである。Kの値は4.9と得られた。式(4.1)から  $l^* = l_0^* = 0.042$  で  $a(l^*) / \rho_0$  は零となり流れは完全に再

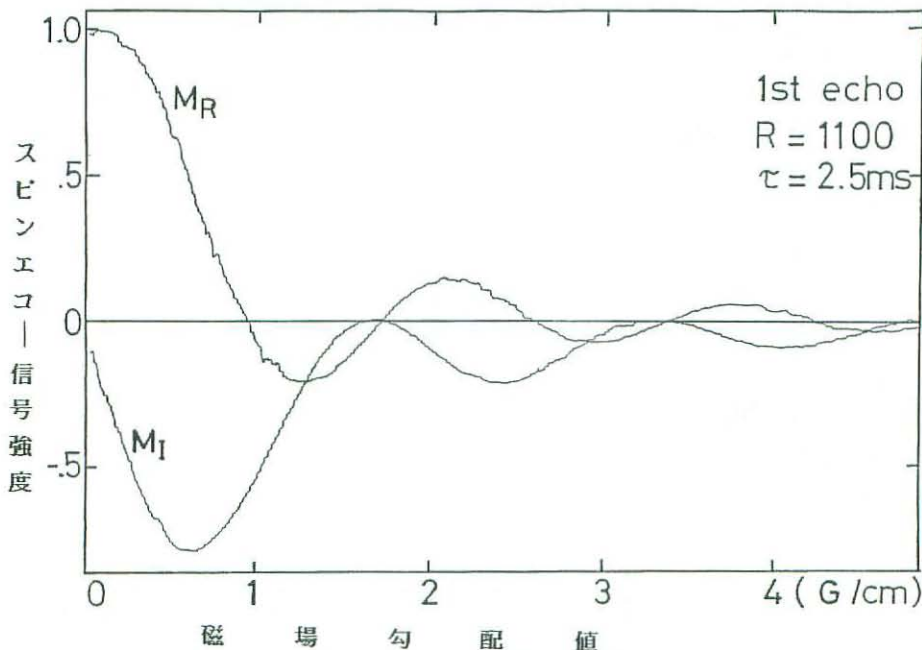
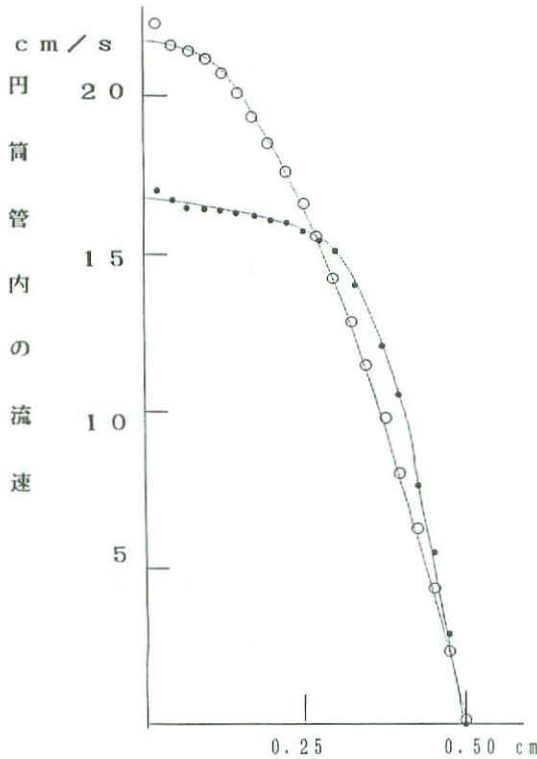


図6 ハーゲン・ポワゼユ流で得られたスピンエコー信号強度の磁場勾配依存  
 $M_R$ は同相成分を $M_I$ は直角成分を表す。格子から十分下流でのハーゲン・ポワゼユ流の結果。図4の理論曲線(破線)と比較されるものである。



管内動径

図7 図5と図6から得られたプロファイル  
●及び○は各々図5, 6から得られた速度プロファイルであり、前者はコアが存在し、後者ではコアが消失してハーゲン・ポワゼイユになっていることが分かる。

びハーゲン・ポワゼイユ流に戻る。

$l_0^*$ は層流の助走流の場合には助走区間と呼ばれ、Schiller<sup>13)</sup>によって計算され0.115である。最近の教科書<sup>17)</sup>では0.13の値が使われている。 $l_0^*$ の値については層流の助走区間と相違があるが、ここでは層流の助走流ではなく乱れた流れからの回復を見ているのであるから、差異があっても当然であろう。

上述の解析は総てのスピンの速度が時間に依存しないと仮定している。この仮定を吟味するために、CPMG法によるスピンエコー信号列のうちの第2の信号強度を調べた。第2の信号は流れの中での“ゆらぎ”あるいは“速度の拡散”<sup>5),6)</sup>のみを反映した信号となり、そのような“ゆらぎ”すなわち速度の時間変化がない場合には層流の信号と理論的には一致する。実験では格子直下 ( $l < 30\text{mm}$ )を除いては層流の信号とに差は見られなかった。

従って式(4.1)で分かるようにコア半径と格子からの距離がそれぞれ無次元量で表されることからこの解析は妥当と思われる。

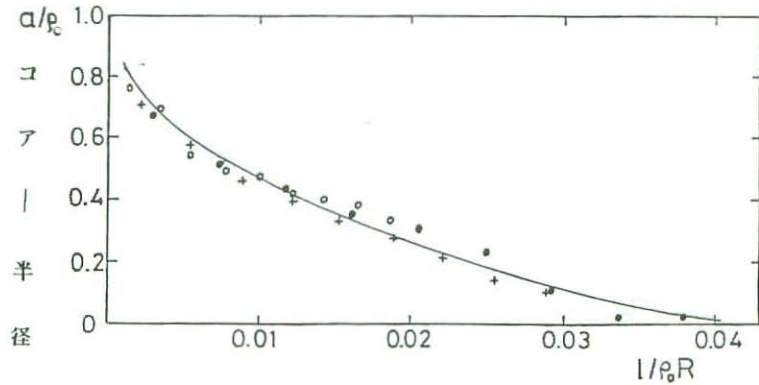


図8 無次元化した格子からの距離とコア半径の関係  $a(l^*)/\rho_0 - l^*$   
○は570, +は750, ●は1160のレイノルズ数でのデータを示す。

## 参考文献

- 1) Stejskal E N: Use of spin echoes in a pulsed magnetic-field gradient to study anisotropic restricted diffusion and flow. *J Chem Phys* **43**: 3597~3603, 1965.
- 2) Packer K J: The study of slow coherent molecular motion by pulsed nuclear resonance. *Mol Phys* **17**: 355-368, 1969.
- 3) Hayward R J, Packer K J and Tomlinson D T: Pulsed field-gradient spin echo NMR studies of flow in fluids. *Mol Phys* **23**: 1082~1102, 1972.
- 4) Garroway A N: Velocity measurements in flowing fluid by NMR. *J Phys D7*: L159~L163, 1974.
- 5) Fukuda K and Hirai A: A pulsed NMR study on the flow of fluid. *J Phys Soc Jpn* **47**: 1999~2006, 1979.
- 6) Kawabe Y, Fukuda K and Hirai A: A note on the signal intensity of the second spin echo in Carr-Purcell-Meiboom-Gill sequence of turbulent flow. *J Phys Soc Jpn*. **52**: 2308~2311, 1983.
- 7) 福田耕治: 拍動流へのパルスNMR実験. *明治鍼灸医学*, **1**: 105~116, 1985.
- 8) Kose K, Satoh K, Inouye T et al: NMR flow imaging. *J Phys Soc Jpn* **54**: 81~92, 1985.
- 9) Fukuda K, Inouye A, Kawabe Y et al: Transition from laminar to turbulent flow of water in a pipe measured by a pulsed NMR method. *J. Phys. Soc. Jpn.* **54**: 4555~4560, 1985.
- 10) 福田耕治: パルス核磁気共鳴による乱流の計測. *日本流体力学会誌* **6**: 187~200, 1987.
- 11) Kose K: NMR imaging of turbulent structure in a transitional pipe flow. *J Phys D (Appl Phys)* **23**: 981~983, 1990.
- 12) Meiboom S and Gill D: Modified spin-echo method for measuring nuclear relaxation times. *Rev Sci Instrum* **29**: 688~691, 1958.
- 13) Schiller von L: Die Entwicklung der Laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeits Messungen. *ZS. angew. Math. Mech.* **2**: 96~106, 1922.
- 14) Goldstein S: Modern developments in fluid dynamics, Vol. 1: Oxford, pp299~310, 1938.
- 15) Tatsumi T: Stability of the laminar inlet-flow prior to the formation of Poiseuille regime. *J Phys Soc Jpn* **7**: 489~502, 1952.
- 16) Kida S and Tatsumi T: Numerical calculation of the laminar inlet flow I. *J Phys Soc Jpn* **34**: 254~263, 1973.
- 17) 日野幹雄: 流体力学 (理工学基礎講座16), 朝倉書店、東京, pp157~158
- 18) 巽友正: 流体力学 (新物理学シリーズ21), 8, 培風館, 東京, pp14~17, 1989.