

動脈の分岐回数に関するコメント

明治鍼灸大学 物理学教室

森本 安夫

要旨: 分岐血管の半径の間に成立する関係及び各レベルでの血管半径とその総面積のデータから, 大動脈より毛細血管に至る間の総分岐回数を評価したところ30~40回という値を得た。解剖学的に知られている各血管系の走行をたどりその分岐回数を数えてみると10~15回程度, 又血管標本の観察では10~20回程度の分岐がみられた。但しこれらは肉眼視観察の範囲であり, そこから毛細血管に至る分岐を考慮すれば上記の評価は妥当なものと思われる。又大動脈から小動脈, 小動脈から毛細血管への分岐を別々に考慮すると, 太い血管と細い血管($\sim 30\mu\text{m}$ 以下)では構成原理が異なっているのではないかと言う事実が示唆された。

Comments on The Number of Arteria Branching

MORIMOTO Yasuo

Department of Physics, Meiji College of Oriental Medicine

Summary: The number of arterial branching from aorta to blood capillary is estimated to be about from 30 to 40 times utilizing the relation held between radii of branched blood vessels and the data of radii of blood vessel and its total cross section. On the other hand it is given about 15 times by tracing the branching sequences of several arteria systems cited in ordinary textbooks of anatomy. The naked eye observation of blood vessel specimen gives about 20 times as its number. Because both observations are limited to the blood vessels of radius larger than about $30\mu\text{m}$ and the branching to the smaller blood vessels are not counted, above estimation can be said to agree quite well with the observation. It is suggested from the branching number consideration that the construction principle of blood vessel is different for a large and a small blood vessels.

Key Words: 動脈分岐 Branching of Arterie, 大動脈 Aorta, 小動脈 Arteriole, 毛細血管 Blood Capillary.

I 序 論

心臓から出た大動脈は分岐を繰り返しながら、末梢の毛細血管に至り、身体各部に栄養素、酸素を供給し、又体温を維持する。それに際して必要なことは分岐毎に血管総断面積を拡大し、流速を遅くし上記の目的を果すことである。従って血管分岐はデタラメには行なわれずある程度の秩序を保ちながら行われる。そのことの必然的な結果として、分岐の回数は生物の種にそれ程よらず、普遍的に決定される可能性がある。

勿論このような問題は形態学的にも大きな問題であり、従来より種々の実験的研究が行なわれているのであるが^{1,2)}、現実の生体の複雑さの為に単に実験的方法のみでは追及しかねる面があることは否めない。そこで本論分では現実の生体の複雑さからは一旦離れ、適当な血管分岐のモデルを用い、分岐した血管径の減少量を用いて分岐回数を評価してみることにした。勿論現実の生体が数理法則のみに従って形態を形成することはありえず、種々の状況に応じて千変万化することは当然である。然し逆にその複雑さ故に、全体として平均的にみれば見事な数理法則が成立していることは珍しいことではない。

良い例は統計力学—物質粒子の多さ ($\sim 10^{23}$ 個) による複雑さ故に、逆にその確率法則を通して見事な規則性が現象する—にみられる³⁾。もし上記のような数理が成立しているとすれば、血管分岐モデルの正しさを裏付けることになる。

そこで次節において簡単に血管分岐のモデルを復習してみる。種々の例があるが⁴⁻⁶⁾ Murray の最小仕事の原理によるモデル⁴⁾、及びそれを改良したモデル⁶⁾を説明する。3 節においては、2 節における議論を用いて、大動脈から毛細血管に至る分岐回数を評価し、同時に血管総断面積の増加も評価する。第 4 節においては前節の議論を現実の生体に適用し、比較してみることにする。勿論厳密にそれを行なうことは不可能に近い。従ってその議論は低い水準にとどまることをあらかじめお断りしておく。比較は 2 つの方法で行なわれる。一つは血管径とその断面積をみてゆくものであり、

いわば平均的にみる方法であり、他は実際の血管分岐を数えるものである。但しこの方法はあまり有効ではなかった。然しこの小論が各種の研究の出発点となる可能性を秘めていることは期待してよからう。最後の節は結論とまとめらしきものを述べる。

II 血管分岐のモデル

血管が 2 本に分岐する際、親血管の半径 r_0 と子血管の半径 r_1 , r_2 の間には、

$$r_0^2 \simeq r_1^2 + r_2^2, \quad n \simeq 2.7 \text{ (内臓器管)} \quad (1)$$

なる関係のあることは古くから知られており¹⁾、それを説明する理論も多く提出されている⁴⁻⁶⁾。 $n > 2$ であるのは当然である。そうでないと分岐血管の断面積が増加せず、末梢での血流速を遅くできないからである。ここでは Murray⁴⁾ による最小仕事の原理によるものと、それを改良した方法⁶⁾を説明しておこう。彼は血管の形成に際して 2 種類の仕事を考え、それが最小になるように形成されると考えた。一つは粘性に抗して血流を維持する仕事、 E_1 である。粘性係数を η 、血管半径 r 、長さ ℓ とし単位時間当りの血流量を f とする (図 1)。 ℓ の間の圧力差を ΔP とし、流れをポアズイユ流とすると、よく知られているように⁷⁾、 $\Delta P = 8 \eta \ell f / \pi r^4$ であるから、

$$E_1 = f \Delta P = \frac{8 \eta \ell}{\pi r^4} f^2, \quad (2)$$

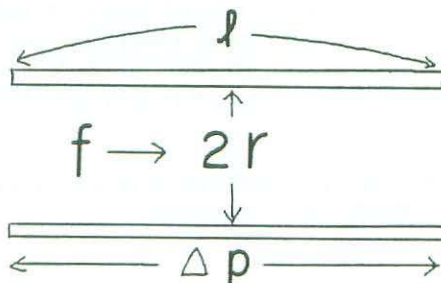


図 1 血管の大きさ。 r は半径、 ℓ は長さ、 f は単位時間当りの流量、 ΔP は ℓ の間にかかる圧力差。

と与えられる。もう一つの仕事 E_2 は血液を維持するための仕事、例えば血液の温度、含まれる栄養素の量を保つ等の仕事であり、当然血液の体積に比例する。比例定数を k とし、

$$E_2 = k \pi r^2 \ell, \quad (3)$$

となる。これを最小化するには $\partial(E_1 + E_2)/\partial r = 0$ とすればよいから、これより f と r の関係が次のように求まる。

$$f = (\pi^2 k / 16 \eta)^{1/2} r^3, \quad (4)$$

図2のような血管の分岐について(4)を適用する。血流量は保存されなければならないから $f_0 = f_1 + f_2$ である。従って、

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3, \quad (5)$$

を得る。 $n = 3$ となり、2.7とはかなり異なる。これに対する補正を考えよう。第3の仕事、 E_3 を導入し、表面に比例すると考える。即ち、

$$E_3 = k' 2 \pi r \ell, \quad (6)$$

内容としては血管形成の物質、血管緊張保存の為の平滑筋の代謝あるいは組織への熱伝達等を考えればよからう。 $E_1 + E_2 + E_3$ を r について最小化すれば、(4)に対応して、

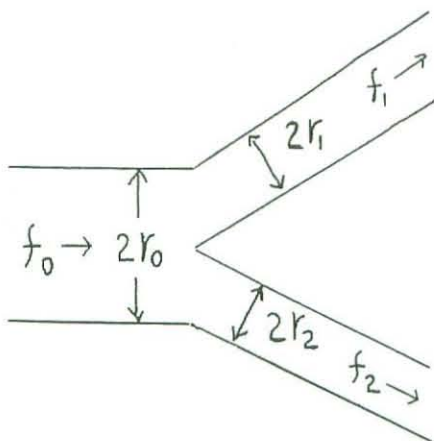


図2 血管の分岐図。

$$f = (\pi^2 k / 16 \eta)^{1/2} \times \{(r + k'/k)r^5\}^{1/2}, \quad (7)$$

が得られる。先程と同様な手法を用いる。 $r \gg k'/k$ の場合には $n = 3$ を与える。これは前列と同等である。 $r \ll k'/k$ では $f \propto r^{2.5}$ となるので $n = 2.5$ を与えるのは容易に分る。実際にはいろんなケースがあり、これらを統計的に処理して得られた値が2.7なのであろう。以上が(1)式を理論付ける説明の概要である。以下の議論で用いられる重要な点は $n \simeq 3$ ならば血管形成の表面効果は少なく、 $n \simeq 2.5$ ならば、それが重要になっているということである。以上の議論はビル内のエアコン用熱媒体の配管の問題にもよく適用される。

III 分岐回数の評価

話を簡単にする為、血管は常に2体に分岐するとしよう。勿論現実はそのようではない。先ず非対称、 $r_1 \gg r_2$ に分岐する場合を考える。これは大きな動脈が側枝を出すようなときで、例えば図3のAと示すように、腹大動脈から分岐する精巣動脈や下腸動脈の場合がそれにあたる。図3は文献(8)より引用した。この場合の断面積の変化をみよう。 $r_1 = 9$, $r_2 = 1$ としよう。(1)より $r_0 = (9^n + 1^n)^{1/n} \simeq 9.01$ となる。但し $n = 2.7$ を用いた。このとき $S_0 = \pi r_0^2 \simeq 255$, 一方 $S_1 + S_2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \simeq 257$ で $S_0 \simeq S_1 + S_2$, 即ち断面積はほとんど変化せず、血流が遅くなることはない。又 $r_0 \simeq r_1 \gg r_2$ であり、大きい動脈の径はほとんど変化しない。このような分岐は毛細血管へ至る分岐ではなく、他の臓器へ血液を分流させる為の分岐と考えられる。ここでの考察からはこのような場合は除外する。

最も効率よく断面積を増加させる、 $r_1 \simeq r_2$ の場合を考えよう。図3でBで示すように腹大動脈から腎動脈が、あるいは左右の総腸骨動脈が分岐するような場合である。(1)式より、

$$r_0^n \simeq 2 r_1^n, \text{ 即ち } r_1 \simeq 2^{-1/n} r_0, \quad (8)$$

が得られる。このとき分岐血管の総断面積は、

$$2 S_1 \simeq 2 \pi r_1^2 = 2^{1-2/n} \pi r_0^2 = 2^{1-2/n} S_0, \quad (9)$$

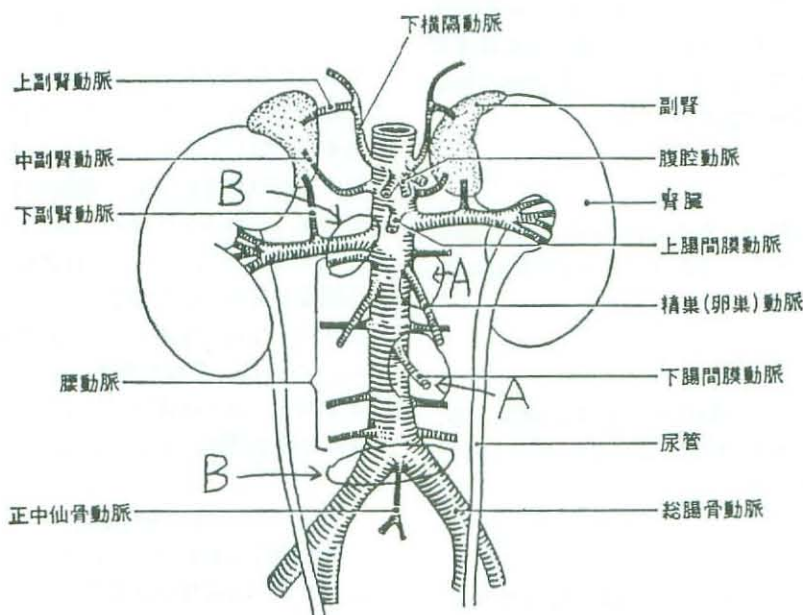


図3 腹大動脈から総腸骨動脈に至る血管系。文献(9)より引用。

となる。 $n=2.7$ を用いると1回の分岐で径は0.8倍、断面積は1.2倍となる。これらの関係を用いて分岐回数を評価してみることにしよう。 N 回の分岐の後大動脈は毛細血管になったとしよう。前者の半径を $r_{大動}$ 、後者のそれを $r_{毛細}$ とする。(以下も同様な表現を用いる。) (8) より、

$$r_{毛細} \approx 2^{-N/n} r_{大動}, \text{ 又は}$$

$$N \approx n \log(r_{大動}/r_{毛細})/\log 2, \quad (10)$$

となる。同様に血管の総断面積からは(9)より、

$$S_{毛細} \approx 2^{(1-2/n)N} S_{大動}, \text{ 又は}$$

$$N \approx (1 - \frac{2}{n})^{-1} \log(S_{毛細}/S_{大動})/\log 2, \quad (11)$$

となる。但し、 $S_{毛細}$ は1本の毛細血管の断面積ではなく、分岐した毛細血管全体の総面積であり、このことは以下でも同様である。

以上の如く原理は非常に単純である。残る問題は現実との比較であるが、現実の血管系へ移る前に、平均的に得られる量で以上の議論を確認して

みよう。表1は生理学の教科書⁸⁾に引用されているヒトの血管系の大きさ及び断面積を示したものである。表1より $r_{大動}=1.25\text{cm}$ 、 $r_{毛細}=3\text{ }\mu\text{m}$ を得る。 $n=2.7$ を用いて(10)へ代入すると、

$$N_r \sim 32\text{回}, \quad (12)$$

という値を得る。同じく表1より $S_{大動}=4.5\text{cm}^2$ 、 $S_{毛細}=4.500\text{cm}^2$ を(11)へ代入して、

$$N_s \sim 38\text{回}, \quad (13)$$

を得る。但し N_r 、 N_s は各々半径及び断面積から評価した分岐回数であることを示す。非常に粗い近似や仮定(常に2本に分かれる、ほぼ同じ径になる、どのレベルでも同じ分岐則に従う)を用いているにもかかわらず、どちらから評価しても似たような分岐回数を与えることは上述の議論の正しさを証明するものではあるまいか。

一方本節の最初で述べたような大動脈から分岐した小さな血管が毛細血管に至る場合はどうであろうか。 $r_{動脈} \approx 1\text{mm}$ としてみよう。 $r_{大動}$ の $1/10$

表1 各レベルでの血管の径及び総断面積、文献(8)より引用。

血 管	内 径	壁 の 厚 さ	総 断 面 積 (cm^2)
大 動 脈	2.5 cm	2 mm	4.5
動 脈	0.4 cm	1 mm	20
小 動 脈	30 μ	20 μ	400
毛 細 血 管	6 μ	1 μ	4,500
小 静 脈	20 μ	2 μ	4,000
静 脈	0.5 cm	0.5 mm	40
大 静 脈	3 cm	1.5 mm	18

なので妥当な値であろう。(11)へ代入すると $N_r \sim 23$ 回という値となる。これは(12)と比べるべきもので32回とは少しずれるが、わずかに9回程度であり、分岐回数が安定なものであることが分る。

次に話が細くなるが表1には小動脈のデータがあるので、大動脈から小動脈、小動脈から毛細血管までの分岐を分けて考えてみよう。先ず気をつけることは前者の過程で断面積はほぼ100倍になるのに対して後者では10倍程度である。この事実は血管分岐は小動脈までにかなり進んでいることを示している。 $r_{\text{小動}} = 15 \mu\text{m}$, $S = 400 \text{cm}^2$ なので、(10), (11)より大動脈から小動脈に至る分岐回数として、

$$N_r \sim 26 \text{回}, N_s \sim 25 \text{回}, \quad (14)$$

と求まり、両者は良い一致を示す。この数字は30に近く先程の予想と一致している。後者では $n = 2.7$ を用いると、

$$N_r \sim 6 \text{回}, N_s \sim 13 \text{回}, \quad (15)$$

となり不一致がめだつ。但しその数は(14)よりはかなり小さく、先の予想とも再び一致する。この不一致、6と13、を解消しよう。計算に際して $n = 2.7$ を用いたのであるが、 $n = 3$ を採用してみよう。結果は、

$$N_r \sim 7 \text{回}, N_s \sim 10 \text{回}, \quad (16)$$

となり、一致はしないがその差は小さくなる。この

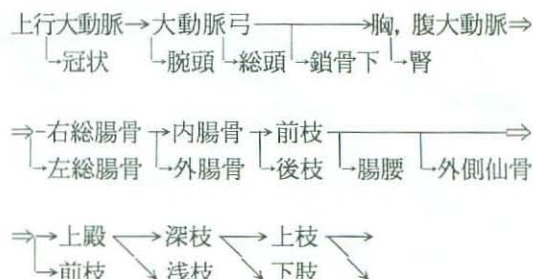
ことは、小動脈以下の血管では $n = 3$ であることを示唆するものである。このことの議論はV節に譲ることにしよう。(15), (16)より合計回数を求めると、

$$N_r \sim 26 + 7 = 33 \text{回}, N_s \sim 25 + 10 = 35 \text{回}, \quad (14)$$

となる。それは(12), (13)と比べられるべきもので($N_r \sim 32$ 回, $N_s \sim 38$ 回)あるが、 n の値を操作することにより、各々の評価はより良い一致を示すようになる。

IV 現実の生体(ヒト)との比較

前節の議論と結論が現実の血管系において成立しているかどうかを確認しよう。手始めとして解剖学の教科書⁹⁾に記載されている血管系の分岐を追ってみる。一つは上行大動脈から骨盤内臓へ分布する系、他は同じく大動脈から頭部外表面へ至る系である。前者からみてゆこう。必要な場合以外は“動脈”の文字は省略する。



以上の通り13回の分岐があり、更に名称のない部

分で3回の分岐が示してある。ここらを肉眼観測可能な範囲とすれば計16回が(4)の値、25と比べるべき値である。これらが一致しているかどうかは議論の分かれるところであろうが、それに近い値を再現しているのは確かである。もう一つの例をみてみよう。



図4 脾臓の血管系の鋳型標本、文献2)より引用。

この場合は名称のある動脈で18回、更にその先2回の分岐が図示しており、計20回という分岐回数を得られる。第1の例と似たようなもので、系によってそう大巾に変化する数字ではないことが分る。スケッチ的な図で確認できるのはここらあたりが限度であろう。前節の記述が正しいとすると後10回程度の分岐をくりかえして毛際血管に至るはずであろう。

もう少し詳しく観察するために血管に樹脂等を注入して作った血管系の鋳型標本を用いてみよう²⁾。図4に脾臓の例を示す²⁾。図中Aとした部分からBとした箇所までをルーペで拡大して数えると、15回という値が得られる(勿論文献2)の図によったもので実物標本を用いたものではない)。大動脈からAの部分まで5回の分岐があるので、合計20回程度の分岐を数えることが可能である。その他の部分も大雑把に15~25回の分岐回数を

確認できる。これ以上には切片を用いた顕微鏡観察によらぬ限り無理であろう。標本観察でみられるのが小動脈程度とすると、この回数は推定値(4)と比較すればよいことになる。即ち25回と15~25回が理論値及び実際の値である。評価が非常に粗いことを考慮すれば満足すべき範囲であろう。他に心臓、腎臓等の血管系でも同様の回数を数えることができた。但し上腸内膜動脈のような吻合の多い箇所では、妥当な結果を得ることはできなかった。

V まとめといくつかの考察

分岐血管の間に成立する簡単な指数則と形態学的に知られている血管径及びその総断面積のデータを用いて、大動脈から毛細血管に至る間の総分岐回数を評価したところ、30~40回という値を得た。もう少し細かく、大動脈から小動脈、小動脈から毛細血管に至る間を評価すると各々25回、7~11回という値を得た。この値の妥当性を確める為に解剖学の教科書に記載されている血管分岐系列(動脈)について、血管に名称が付されている範囲について調べたところ、10~15回という分岐回数を数えることができた。これらについてはかなり太い血管しか記載されていないだろうから上記の評価(もし正しいとして)と大きくずれるのは、むしろ当然といってよからう。一方血管の鋳型標本(主に内臓)については、これも教科書(A Color Atlas of Human Anatomy)の原図をルーペで確認することで15~25回の分岐回数を数えることができた。この方法では、小動脈程度まで観察可能と考え、上記の評価は非常に優れたものといえよう。小動脈から毛細血管に至る間については残念ながら著者は実験的にこれを確認する手段を有していないので断念した。分岐回数がこのような値におさまることについての生物学的意味を明らかにすることは今後の課題である。

興味ある副産物として小動脈程度の大きさの血管を境にして血管構成の原理が異なるのではないということが示唆された。即ちⅢ節で指摘したように n の値が太い血管では2.7で記述されるのに対して、細い血管では $n=3$ が妥当なように思える。 $n=3$ ということは血管の形成に関して表面積に比例する仕事は効果的でないことを示している。細い血管ほど体積に対する表面積の比が大きくなるので、この結論は逆のようにみえる。然しこの事実は次のように考えれば納得できる。即ち毛細血管部に近くなるにつれ間質液、末端組織との物質交換が盛んになるので、血管壁は薄くなければならないし、太い血管のように血管緊張を保持する必要もなくなるだろう。これらは各れも表面積に比例する仕事であり、これらが必要でな

くなる為に n の値が3に近付くと考えれば合理的であろう。

以上のように血管分岐回数は比較的単純な論理で評価でき、それが現実の血管系でかなりよくその評価を再現していることが明らかにされた。このことの生理学的、生物学的意味については今後の研究に待たねばならないが、閉鎖血管系をもつ生物についてはかなり普遍的に成立している可能性があると思われる。

謝 辞

著者は解剖学について全くの門外漢であるので、Ⅳ節の血管の走行については、解剖学教室、松浦教授その他の御教示を頂いた。この件に関して厚い謝意を表したい。又同時に生物学的見地からの批判と議論を頂いたことにも併せて感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 諏訪紀夫: 器管病理学, 朝倉書店, 144, 1968.
- 2) R M McMinn, R T Hutchings: A Color Atlas of Human Anatomy, Wolfe Medical Publication Ltd, 1977.
- 3) ランダウ, リフシツ(小林秋男等訳): 統計物理学上, 岩波書店, 1957.
- 4) Murray CD: The physiological principle of minimum works, Proc. Nat. Acad. Sci., 12: 207~211, 1926.
- 5) Kamiya A, Togawa T: Optimal branching structure of the vascular tree, Bull. Math. Biophys., 34: 431~433, 1972.
- 6) 森本安夫: 分岐血管の径の間の関係に関するコメント, 電子通信学会論文誌, J 64-A, 582~583, 1981.
- 7) 巽 友正: 流体力学, 培風館, 1989.
- 8) 真島英信: 生理学, 文光堂, 1977.
- 9) 清水勘治: 小解剖学, 金芳堂, 1980.